Практикалық сабақ №14

Тақырыбы: Екінші текті беттік интеграл.

Мақсаты: Екінші текті беттік интегралды есептеу.

Мысал. Екінші текті беттік интегралды есептеңіз:

$$I = \iint_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy,$$

мұндағы $S -\quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ теңдеуімен берілген сфераның сыртқы жағы.

Шешуі: $I_1 = \iint_S z\, dx\, dy$ интегралды қарастырамыз.

$z = 0$ жазықтығы мен S сфера,

$$S^+ = \left\{(x, y, z) \in R^3 : z^+ = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\right\},$$

$$S^- = \left\{(x, y, z) \in R^3 : z^- = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\right\},$$

мұндағы $D = \left\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le a^2\right\}$, беттердің жатық шегі болатын, $\gamma = \left\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = a^2\right\}$ шеңбер бойынша қиылысады.

γ қисық бағыты S^+ / γ және S^- / γ көпбейнеліктер бағыттарымен келіскен болу керек. Бұл бағыттар қарама қарсы, сондықтан

$$I_1 = \iint_{S^+} z\, dx\, dy + \iint_{S^-} z\, dx\, dy = \iint_D z^+ dx\, dy - \iint_D z^- dx\, dy = 2\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

Полярлық координаталарға көшіп, келесі интегралға келеміз

$$I_1 = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho\sqrt{a^2 - \rho^2}\, d\rho = \frac{4}{3}\pi\left(a^2 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_a^0 = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Айқын теңдіктерді

$$\iint_S x\, dy\, dz = \iint_S y\, dz\, dx = I_1$$

ескере отырып, соңында аламыз $I = 4\pi a^3$.

Аудиториялық жұмысы: Екінші текті беттік интегралды есептеу: [8] №№ 4364, 4366. *Остроградский-Гаусс, Стокс формулалары:* [8] №№ 4370, 4372, 4374.

Үй жұмысы

№№ 4363, 4365. №№ 4371, 4373.